

Έργο – Ενέργεια – Ισχύς

Έργο δύναμης

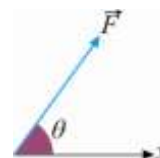
Ορισμός:

$$W = F x \sin\varphi \quad (1)$$

όπου F το μέτρο της δύναμης, x η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της και φ η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με τη μετατόπιση.

Η (1) ισχύει για σταθερή δύναμη που το σημείο εφαρμογής της διαγράφει ευθεία τροχιά.

Μονάδα S.I.: $1 \text{ N m} = 1 \text{ J (Joule)}$



Διερεύνηση της (1)

α. Αν $0 \leq \varphi < 90^\circ \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow W > 0$. Η δύναμη F παράγει έργο ή το έργο της παραγόμενο.

β. Αν $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow W < 0$. Η δύναμη F καταναλώνει έργο ή το έργο της καταναλισκόμενο.

Παράδειγμα: Το έργο της τριβής είναι πάντα αρνητικό.

γ. Αν $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow W = 0$.

Παραδείγματα: Το έργο της κάθετης δύναμης N , το έργο της κεντρομόλου δύναμης F_K , το έργο του βάρους B , αλλά μόνο αν η μετατόπιση είναι οριζόντια.

Το έργο δύναμης εκφράζει μεταφορά ενέργειας, από ένα σώμα σε ένα άλλο, ή μετατροπή ενέργειας, από μια σε άλλη μορφή.

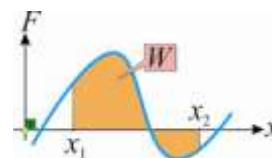
Έργο συνισταμένης δύναμης

$$W_{\Sigma F} = W_{F_x} + W_{F_y}$$

όπου $W_{\Sigma F}$ το έργο της συνισταμένης δύναμης και W_{F_x} και W_{F_y} τα έργα των συνιστωσών της.

Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου

Αν η δύναμη F δεν έχει σταθερό μέτρο, το έργο της υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση $F-x$ και είναι ίσο με το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη του διαγράμματος και του άξονα των x .



Κινητική Ενέργεια

Κινητική ενέργεια K ενός σώματος είναι το μονόμετρο μέγεθος που ορίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Θεώρημα Κινητικής Ενέργειας

Η σχέση του έργου με την κινητική ενέργεια εκφράζεται με το θεώρημα της κινητικής ενέργειας (Θ.Κ.Ε.):

«Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που δρουν πάνω του», ή

$$\Delta K = \Sigma W_F$$

Δυναμική Ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια U ενός σώματος είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασής του με τη Γη. Όταν ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε ύψος h η δυναμική του ενέργεια είναι:

$$U = mgh$$

Μηχανική Ενέργεια

Η μηχανική ενέργεια E ενός σώματος είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας K και της δυναμικής U του ενέργειας, δηλ.

$$E = K + U$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

Αν σε ένα σώμα ασκείται μόνο το βάρος του και οι άλλες δυνάμεις σ' αυτό έχουν μηδενικό έργο, τότε η μηχανική του ενέργεια είναι σταθερή.

Συντηρητικές Δυνάμεις

Συντηρητικές (ή διατηρητικές) δυνάμεις ονομάζονται εκείνες οι δυνάμεις που το έργο τους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδενικό.

Συντηρητικές δυνάμεις είναι: το βάρος (και γενικά η δύναμη παγκόσμιας έλξης), η δύναμη ανάμεσα σε ακίνητα ηλεκτρικά φορτία (δύναμη *Coulomb*), η δύναμη από ελατήριο κ.ά.

Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων δεν εξαρτάται από την τροχιά του σώματος αλλά μόνο από την αρχική και τελική του θέση.

Μια μη συντηρητική δύναμη είναι η τριβή και γενικότερα η δύναμη αντίστασης π.χ. από τον αέρα.

Οι μη συντηρητικές δυνάμεις, όταν ασκούνται σ' ένα σώμα μεταβάλλουν τη μηχανική του ενέργεια.

Υπολογισμός Έργου Συντηρητικής Δύναμης

Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από μια θέση 1 σε μια άλλη 2 ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, δηλ.

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U$$

ή

$$W_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2$$

Ισχύς

Η ισχύς P μιας μηχανής ορίζεται ίση με το πηλίκο της ενέργειας E που παράγει η μηχανή σε χρόνο t προς το χρόνο αυτό, δηλ.

$$P = \frac{E}{t}$$

Η ισχύς είναι μονόμετρο μέγεθος και η μονάδα μέτρησής της στο S.I. είναι το 1 Joule/s = 1Watt.

Η ισχύς ορίζεται και για δύναμη:

$$P = \frac{W}{t}$$

όπου W είναι το έργο της δύναμης σε χρόνο t .

Σχέση ισχύος και δύναμης:

$$P = Fv$$

Ο τύπος ισχύει για σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα και ασκείται σε αυτό σταθερή δύναμη που έχει την ίδια κατεύθυνση με τη ταχύτητα. Ισχύει επίσης όταν τα μεγέθη P , F και v είναι στιγμιαία.

Μεθοδολογία για την λύση προβλημάτων ενεργειακά

Υπάρχουν δύο σπουδαία ενεργειακά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων μηχανικής: 1. Το Θεώρημα της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Κ.Ε.) και 2. Η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.).

Χρήση Θ.Κ.Ε.

Το Θ.Κ.Ε. ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από το είδος των δυνάμεων που ασκούνται.

Είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό μιας άγνωστης ταχύτητας, σε κάποια δεδομένη θέση, ή για τον υπολογισμό ενός άγνωστου έργου δύναμης, από τον υπολογισμό του οποίου μπορεί να βρεθεί είτε το μέτρο μιας άγνωστης δύναμης, είτε μια άγνωστη μετατόπιση.

Για να εφαρμόσουμε το Θ.Κ.Ε.:

1. διαλέγουμε την κατάλληλη διαδρομή του σώματος και σημειώνουμε τη ταχύτητά του στην αρχή και στο τέλος της.
2. Βρίσκουμε όλες τις δυνάμεις στο σώμα σε μια ενδιάμεση θέση της διαδρομής.
3. Υπολογίζουμε τα έργα όλων των δυνάμεων στο σώμα κατά μήκος της διαδρομής.

Χρήση Α.Δ.Μ.Ε.

Η Α.Δ.Μ.Ε. ισχύει μόνο όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές (ή ψευδοσυντηρητικές¹). Αυτό είναι ένα μειονέκτημα, αλλά όταν είναι δυνατή η χρήση της απλοποιεί τον υπολογισμό των έργων των υπάρχοντων συντηρητικών δυνάμεων, αφού ο υπολογισμός αυτός γίνεται από τον τύπο: $W_{F_{1 \rightarrow 2}} = U_1 - U_2$.

Για να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε.:

1. διαλέγουμε την κατάλληλη διαδρομή του σώματος και σημειώνουμε τη ταχύτητά του στην αρχή και στο τέλος της.
2. Ορίζουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κατώτατο σημείο της διαδρομής του σώματος.

Παρατηρήσεις

Όταν υπάρχει τριβή ολίσθησης, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε Α.Δ.Μ.Ε. γιατί η τριβή είναι μη συντηρητική δύναμη.

Σε προβλήματα υπολογισμού χρόνου κίνησης ενός σώματος, δε χρησιμοποιούμε ενεργειακά εργαλεία, αλλά τις εξισώσεις της δυναμικής και κινητικής. Αντίθετα όταν στο πρόβλημα δεν εμπλέκεται χρόνος κίνησης, είναι προτιμότερη η χρήση ενεργειακού εργαλείου.

Τι διαλέγουμε (Θ.Κ.Ε.) ή (Α.Δ.Μ.Ε.);

Εξετάζουμε πρώτα όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Αν είναι όλες συντηρητικές (ή ψευδοσυντηρητικές), τότε εφαρμόζω την Α.Δ.Μ.Ε., αλλιώς το Θ.Κ.Ε..

Εφαρμογές-Ασκήσεις

1. Από τη άκρη ταράτσας, σε ύψος $h = 30 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος, εκτοξεύεται ένα βαρίδι κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 5 \text{ m/s}$.

α. Σε ποιο ύψος, από το σημείο βολής, θα φτάσει το βαρίδι;

β. Με ποια ταχύτητα, κατά την κάθοδο, θα περάσει από το σημείο βολής;

γ. Με ποια ταχύτητα φτάνει στο έδαφος;

(Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(Απ. α. 1,25 m, β. 5 m/s, γ. 25 m/s)

2. Από ύψος $h = 5 \text{ m}$ πάνω από οριζόντιο δάπεδο, αφήνεται να ολισθήσει κιβώτιο κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου.

α. Με ποια ταχύτητα φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;

β. Εξαρτάται η ταχύτητα που βρήκατε από την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου και γιατί;

(Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(Απ. α. 10 m/s, β. όχι)

3. Μία σκιέρ ξεκινάει από την ηρεμία στην κορυφή ενός λόφου, που βρίσκεται σε ύψος 100 m πάνω από μια κοιλάδα.

α. Με πόση ταχύτητα φθάνει η σκιέρ στην κοιλάδα;



1 Ψευδοσυντηρητικές λέγονται οι δυνάμεις που το έργο τους είναι συνεχώς μηδενικό, π.χ. το έργο της κεντρομόλου δύναμης

β. Αν στη συνέχεια, με την ταχύτητα που απέκτησε, αρχίσει να ανεβαίνει σ' ένα ψηλότερο λόφο, σε ποιο ύψος θα φθάσει;

γ. Σε ποιο ύψος η κινητική της ενέργεια θα είναι ίση με τη δυναμική;
(Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και να αγνοήσετε τις τριβές και την αντίσταση του αέρα.)

4. Από ένα σημείο της μπανιέρας πέφτει το σαπούνι διαγράφοντας πάνω της ένα κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = 0,45 \text{ m}$. Θεωρείστε αμελητέα τη τριβή ανάμεσα στο σαπούνι και τη μπανιέρα.

α. Με ποια ταχύτητα φτάνει στη βάση του τεταρτοκυκλίου;

β. Με ποια ταχύτητα περνάει από το σημείο του τεταρτοκυκλίου στο οποίο η ακτίνα της τροχιάς σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφη;

(Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\sin 60^\circ = 0,5$)

(Απ. α. 3 m/s , β. $1,5\sqrt{2} \text{ m/s}$)

5. Σε κιβώτιο μάζας $m = 1 \text{ kg}$, που αρχικά βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη F . Η τιμή της δύναμης F μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της, σύμφωνα με τη σχέση $F = 20 - 4x$ (x σε m , F σε N) και καταργείται όταν μηδενιστεί. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του οριζόντιου δαπέδου είναι $\mu = 0,4$. Να υπολογίσετε:

α. Την ενέργεια που προσφέρει στο κιβώτιο η δύναμη F μέχρι να καταργηθεί.

β. Την ταχύτητα του κιβωτίου τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F .

γ. Τη μετατόπιση του κιβωτίου μέχρι η ταχύτητά του να μηδενιστεί.

δ. Τη μέγιστη ταχύτητα του κιβωτίου.

(Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(Απ. α. 50 J , β. $\sqrt{60} \text{ m/s}$, γ. $12,5 \text{ m}$, δ. 8 m/s)

6. Κιβώτιο μάζας $m = 2 \text{ kg}$, κινούμενο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, προσκρούει με ταχύτητα $v_0 = 4 \text{ m/s}$ στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 24 \text{ N/m}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης κιβωτίου-δαπέδου είναι $\mu = 0,2$.

α. Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;

β. Ποια είναι η ταχύτητα του κιβωτίου στο σημείο που η συμπίεση του ελατηρίου είναι το μισό της μέγιστης;

(Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(Απ. α. 1 m , β. $\sqrt{11} \text{ m/s}$)

7. Ένα εκκρεμές αποτελείται από ένα μικρό βαρίδι μάζας $m = 1 \text{ kg}$ και αβαρές νήμα μήκους $L = 5 \text{ m}$. Το βαρίδι συγκρατείται έτσι ώστε αρχικά το νήμα να είναι οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή το βαρίδι αφήνεται ελεύθερο από την ηρεμία. Όταν το νήμα περνά από την κατακόρυφο πιάνεται σε ένα μικρό καρφί που βρίσκεται σε απόσταση R πάνω από το βαρίδι.

α. Ποια είναι η ταχύτητα του βαριδιού όταν το νήμα περνά από την κατακόρυφο;

β. Ποια είναι η τάση του νήματος όταν αυτό περνά από την κατακόρυφο;

γ. Ποια πρέπει να είναι η μέγιστη απόσταση R ώστε το νήμα να παραμένει τεντωμένο καθώς το βαρίδι διαγράφει έναν ολόκληρο κύκλο γύρω από το καρφί;

(Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και να αγνοήσετε την αντίσταση του αέρα.)

(Απ. α. 10 m/s , β. 30 N , γ. 2 m .)

