

Προαπαιτούμενα Μαθηματικά για τη Φυσική Θετικής

Περιεχόμενα

1. Διανύσματα
2. Βασικές συναρτήσεις - Διαγράμματα
3. Τριγωνομετρία

1. Διανύσματα

Διάνυσμα ορίζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο που το ένα άκρο του είναι η αρχή, ενώ το άλλο άκρο του το τέλος του διανύσματος. Η αρχή ενός διανύσματος λέγεται και σημείο εφαρμογής του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το A και τέλος το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B.

Μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η απόσταση των άκρων του, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB^1 .

Μηδενικό διάνυσμα: εκείνο που η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν.

Φορέας ενός διανύσματος (μη μηδενικού): η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα. (π.χ. η ευθεία (ε) στο σχήμα 1)

Συγγραμμικά διανύσματα: τα μη μηδενικά διανύσματα, που έχουν ή τον ίδιο φορέα, ή παράλληλους φορείς. Δύο συγγραμμικά διανύσματα λέμε ότι έχουν **ίδια διεύθυνση**. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίδια διεύθυνση, γράφουμε συμβολικά $\vec{a} // \vec{\beta}$.

Η **φορά** ενός διανύσματος δηλώνει την πορεία μετάβασης από την αρχή προς το τέλος του.

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**.

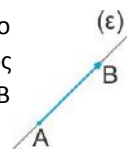
Ομόρροπα διανύσματα: εκείνα που έχουν **ίδια διεύθυνση** και **φορά**.

Τα ομόρροπα διανύσματα λέμε ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση**.

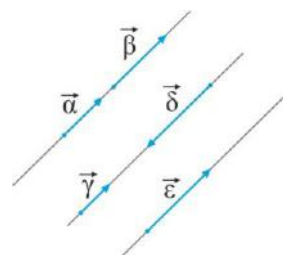
Αντίρροπα διανύσματα: εκείνα που έχουν **ίδια διεύθυνση** και αντίθετη **φορά**.

Ίσα διανύσματα: εκείνα που έχουν την **ίδια κατεύθυνση** και **ίσα μέτρα**.

Αντίθετα διανύσματα: εκείνα που έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** και **ίσα μέτρα**.



Σχ. 1



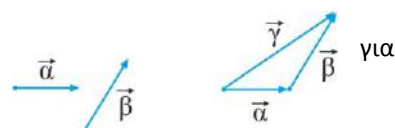
Σχ. 2

Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

Πρόσθεση Διανυσμάτων

Η πρόσθεση και η αφαίρεση των διανυσματικών μεγεθών γίνεται με διαφορετικούς κανόνες από εκείνους για τα μονόμετρα μεγέθη. Για παράδειγμα να προσθέσω δύο όμοια μονόμετρα μεγέθη, προσθέτω τα μέτρα τους. Αυτό όμως **δεν** ισχύει γενικά για τα διανυσματικά μεγέθη².

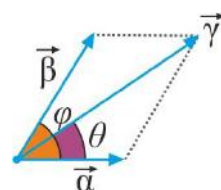
Για να προσθέσουμε δύο (ή περισσότερα) διανύσματα τα κάνουμε διαδοχικά και στη συνέχεια ενώνουμε την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου. Αυτό το διάνυσμα λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων. (Σχ. 3).



Σχ. 3

Πρόσθεση Δύο Διανυσμάτων

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων, εκτός από τον προηγούμενο τρόπο, βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλόγραμμου: Βάζουμε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του σχ. 3, ώστε να έχουν κοινή αρχή.



Σχ. 4

είου

¹ Το μέτρο ενός διανύσματος, π.χ. του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$ ή $|AB|$. Στη d συνήθως συμβολίζεται με AB. Π.χ. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ συμβολίζεται με F.

² Διανυσματικά μεγέθη είναι εκείνα που προστίθενται ή αφαιρούνται όπως οι μετατοπίσεις.

Τότε σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο, η διαγώνιος του οποίου, το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι το **άθροισμα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (Σχ. 4), δηλ.

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Με γνωστά τα μέτρα α και β των διανυσμάτων αντίστοιχα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη μεταξύ τους γωνία φ , υπολογίζουμε το **μέτρο** από τον τύπο: $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\varphi}$

τη **διεύθυνση**, με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων, δηλ.: $\frac{\beta}{\eta\mu\theta} = \frac{\gamma}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\beta\eta\mu\varphi}{\gamma}$

ή με εφαρμογή του τύπου: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta\eta\mu\varphi}{\alpha + \beta\cos\varphi}$.

Πρόσθεση Δύο Διανυσμάτων που είναι κάθετα μεταξύ τους

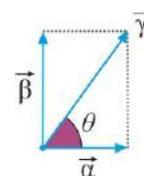
Αυτή είναι μία υποπερίπτωση του προηγούμενου, όπου η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι $\varphi = 90^\circ$ (Σχ. 5).

Υπολογίζουμε

το **μέτρο** από τον τύπο: $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

και τη **διεύθυνση**, με εφαρμογή του ορισμού οποιουδήποτε τριγωνομετρικού αριθμού, π.χ.

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$



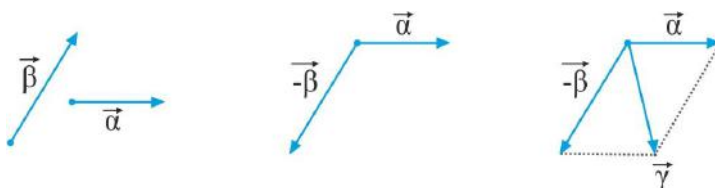
Σχ. 5

Αφαίρεση Δύο Διανυσμάτων

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα, προσθέτουμε το αντίθετο του διανύσματος, που θέλουμε να αφαιρέσουμε. Έτσι για να βρούμε το $\alpha - \beta$, υπολογίζουμε το $\alpha + (-\beta)$.

Η πορεία που ακολουθούμε φαίνεται στο Σχ. 6.

Εφαρμόζουμε τους τύπους που ισχύουν για την πρόσθεση δύο διανυσμάτων.



Σχ. 6

Πρόσθεση (ή Αφαίρεση) Διανυσμάτων που έχουν Ίδια Διεύθυνση

Στην περίπτωση αυτή για να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) διανύσματα, προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) τις **αλγεβρικές τους τιμές**.

Αλγεβρική τιμή ενός διανύσματος είναι το μέτρο του με πρόσημο θετικό, εφόσον η κατεύθυνση του διανύσματος είναι προς τη θετική φορά του άξονα και με πρόσημο αρνητικό, εφόσον η κατεύθυνση του διανύσματος είναι προς την αρνητική φορά του άξονα.

Αναλυτικά:

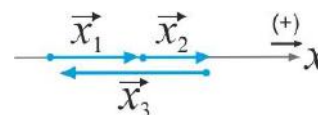
1. Παίρνουμε έναν προσανατολισμένο άξονα με διεύθυνση ίδια με εκείνη των διανυσμάτων.

2. Αντικαθιστούμε, στη σχέση των διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα με την αλγεβρική του τιμή και κάνουμε τις πράξεις με τις αλγεβρικές τιμές.

3. Το αποτέλεσμα είναι η αλγεβρική τιμή του ζητούμενου διανύσματος. Από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής προσδιορίζουμε τη φορά του ζητούμενου διανύσματος: αν είναι θετική, το διάνυσμα έχει φορά προς τη θετική φορά του άξονα, αλλιώς προς την αρνητική.

Εφαρμογή

Ένας μαθητής περπατάει ευθύγραμμα και στο σχήμα φαίνονται οι μετατοπίσεις



Σχ. 7

του. Αν τα μέτρα των μετατοπίσεων είναι: $x_1 = 4 \text{ m}$, $x_2 = 3 \text{ m}$ και $x_3 = 6 \text{ m}$, ποια είναι η συνολική μετατόπισή του;
Λύση

Η συνολική μετατόπιση $\vec{x}$ θα είναι:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \quad (1)$$

Παίρνω τον προσανατολισμένο άξονα x , στον οποίο η θετική φορά είναι προς τα δεξιά (Σχ. 7). Η σχέση (1) γράφεται:

$$(x) = (x_1) + (x_2) + (x_3) \quad (2)$$

όπου σε κάθε παρένθεση βάζω τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων.

Αντικαθιστώ στη (2):

$$(x) = (+4) + (+3) + (-6) \Rightarrow x = +1.$$

Η αλγεβρική τιμή της συνολικής μετατόπισης είναι $+1 \text{ m}$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης έχει μέτρο 1 m και κατεύθυνση προς τα θετικά του άξονα, δηλ. προς τα δεξιά.

Στο ίδιο παράδειγμα, ποια είναι η διαφορά των μετατοπίσεων: $\vec{\Delta x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_3$;

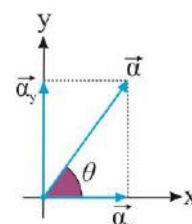
Έχουμε: $(\Delta x) = (x_1) - (x_3) \Rightarrow (\Delta x) = (+4) - (-6) \Rightarrow (\Delta x) = -2.$

Η ζητούμενη διαφορά των μετατοπίσεων έχει μέτρο 2 m και κατεύθυνση προς τα αρνητικά του άξονα, δηλ. προς τα αριστερά.

Ανάλυση Διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ένα διάνυσμα μπορεί να ορισθεί με τις **συνιστώσες** του.

Έστω το διάνυσμα $\vec{a}$ (Σχ. 8). Παίρνουμε δύο κάθετους άξονες x και y προσανατολισμένους, ώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ να ανήκει στο ίδιο επίπεδο με αυτούς. Βρίσκουμε τις προβολές του



Σχ. 8

διανύσματος $\vec{a}$ στους άξονες x και y , δηλ. τα δύο διανύσματα $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$. Ισχύει:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Με δεδομένα το μέτρο a του διανύσματος $\vec{a}$ και τη γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα με έναν από τους δύο άξονες, έχουμε για τα μέτρα a_x και a_y των συνιστωσών:

$$a_x = a \cos \theta$$

$$\text{και } a_y = a \sin \theta$$

Πρόσθεση περισσότερων από δύο Διανυσμάτων με διαφορετική διεύθυνση

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της πρόσθεσης διανυσμάτων δηλ. να τα κάνουμε διαδοχικά και στη συνέχεια να ενώσουμε την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου. (Σχ. 9).

Προτιμάμε όμως έναν άλλο τρόπο:

1. Εκλέγουμε δύο κάθετους άξονες x και y προσανατολισμένους.

Η εκλογή των αξόνων είναι αυθαίρετη, έτσι η εκλογή τους γίνεται με στόχο όσο το δυνατό περισσότερα διανύσματα να συμπίπτουν με τους άξονες.

2. Αναλύουμε όσα διανύσματα είναι εκτός των αξόνων.

Από την ανάλυση των διανυσμάτων προκύπτουν γενικά δύο εξισώσεις για κάθε ένα διάνυσμα που αναλύουμε.

3. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των διανυσμάτων στους άξονες, δηλ. τα σ_x και σ_y .

4. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των διανυσμάτων σ_x και σ_y , εφαρμόζοντας τους τύπους για τη συνισταμένη δύο κάθετων διανυσμάτων.



Σχ. 9

Εφαρμογή

Να βρεθεί η συνισταμένη των μετατοπίσεων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ του σχήματος 10. Τα μέτρα των μετατοπίσεων είναι $a = 2$ m, $\beta = 4$ m και $\gamma = 6$ m, η γωνία μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι 120° και η γωνία μεταξύ των $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$ είναι 135° .
(Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = 0,50$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,87$, $\eta\mu 45^\circ = 0,71$, $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0,71$.)

Λύση

1. Εκλέγουμε δύο κάθετους άξονες x και y προσανατολισμένους.

Εκλέγουμε τον άξονα των x ώστε να συμπίπτει με το διάνυσμα $\vec{a}$ (Σχ. 11, I).

2. Αναλύουμε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Έχουμε:

$$\beta_x = \beta \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \beta_x = 4 \cdot 0,5 \Rightarrow \beta_x = 2 \text{ m.}$$

$$\beta_y = \beta \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow \beta_y = 4 \cdot 0,87 \Rightarrow \beta_y = 3,48 \text{ m.}$$

$$\gamma_x = \gamma \eta\mu 45^\circ \Rightarrow \gamma_x = 6 \cdot 0,71 \Rightarrow \gamma_x = 4,26 \text{ m}$$

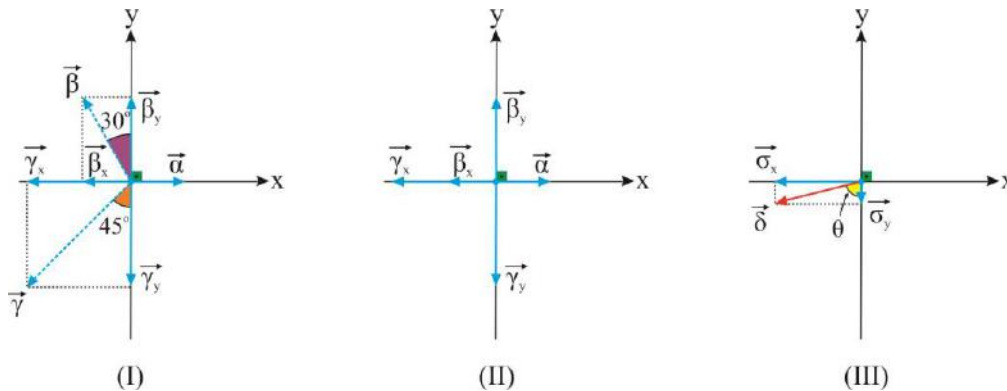
$$\gamma_y = \gamma \sigma\upsilon\nu 45^\circ \Rightarrow \gamma_y = 6 \cdot 0,71 \Rightarrow \gamma_y = 4,26 \text{ m}$$

Σχ. 10

3. Βρίσκουμε τη συνισταμένη των διανυσμάτων στους άξονες, δηλ. τα σ_x και σ_y . (Σχ. 11, II).

$$\sigma_x = (+a) + (-\beta_x) + (-\gamma_x) \Rightarrow \sigma_x = (2) + (-2) + (-4,26) \Rightarrow \sigma_x = -4,26 \text{ m και κατεύθυνση προς τα αρνητικά.}$$

$$\sigma_y = (+\beta_y) + (-\gamma_y) \Rightarrow \sigma_y = (+3,48) + (-4,26) \Rightarrow \sigma_y = -0,78 \text{ m και κατεύθυνση προς τα αρνητικά.}$$



Σχ. 11

Βρίσκουμε τη συνισταμένη των διανυσμάτων σ_x και σ_y , εφαρμόζοντας τους τύπους για τη συνισταμένη δύο κάθετων διανυσμάτων.

Ισχύει (Σχ. 11, III):

$$\vec{\delta} = \vec{\sigma_x} + \vec{\sigma_y}$$

Το μέτρο:

$$\delta = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{(-4,26)^2 + (-0,78)^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{18,15 + 0,61} \Rightarrow \delta = \sqrt{18,76} \Rightarrow \delta = 4,3 \text{ m}$$

Η διεύθυνση:

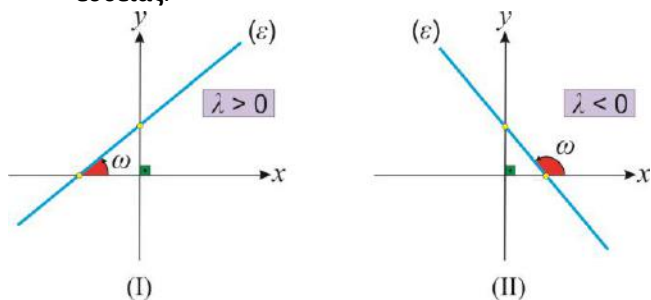
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{4,26}{0,78} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 5,46 \Rightarrow \theta = 79,6^\circ.$$

2. Βασικές συναρτήσεις - Διαγράμματα

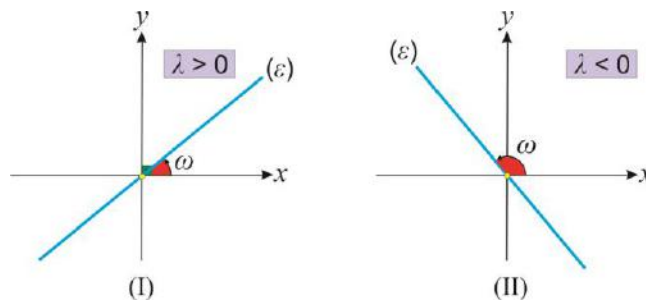
Οι πιο κάτω συναρτήσεις καλύπτουν τις περισσότερες περιπτώσεις που συναντάμε στη Φυσική του Λυκείου.

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Έχει γραφική παράσταση μία **ευθεία** γραμμή (σχήμα 12), γι αυτό και η εξίσωση $y = ax + \beta$ ονομάζεται **εξίσωση ευθείας**.



Σχ. 12



Σχ. 13

Συντελεστής διεύθυνσης (ή κλίση) μιας ευθείας: η εφαπτομένη της γωνίας ω^3 που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x . Συμβολίζεται με λ και ισχύει:

$$\lambda = \epsilon \phi \omega = a$$

Η συνάρτηση $y = ax$

Έχει γραφική παράσταση μία ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων (σχήμα 13).

Η συνάρτηση $y = ax^2$ $a \neq 0$

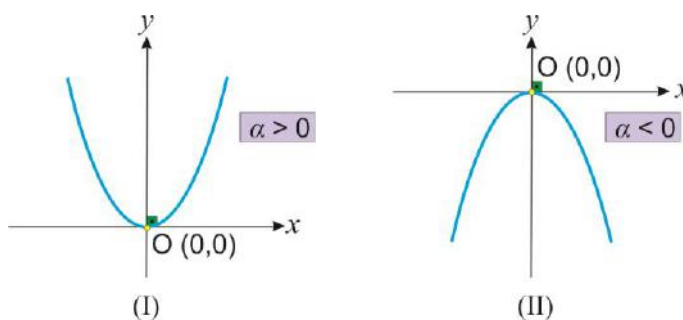
Έχει γραφική παράσταση μία γραμμή που λέγεται **παραβολή** (σχήμα 14), γι αυτό και η εξίσωση $y = ax^2$ ονομάζεται **εξίσωση παραβολής**. Η παραβολή έχει κορυφή στο σημείο $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα y .

I. Αν $a > 0$,

η παραβολή βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα x και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή (min)**.

II. Αν $a < 0$,

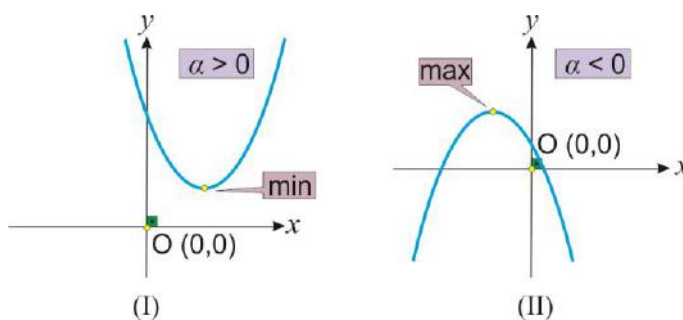
η παραβολή βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή (max)**.



Σχ. 14

Η συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a \neq 0$ είναι **παραβολή** της οποίας η κορυφή **δε** βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$ (σχήμα 15).



Σχ. 15

³ Η γωνία ω είναι εκείνη που διαγράφει ο θετικός ημιάξονας Ox , κινούμενος κατά τη θετική φορά, ώπου να συμπίσει με την ευθεία ϵ , άρα $0 \leq \omega < 180^\circ$.

I. Αν $a > 0$, η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή (min)**.

II. Αν $a < 0$, η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή (max)**.

Η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη (ή μέγιστη) τιμή για $x = -\frac{\beta}{2a}$

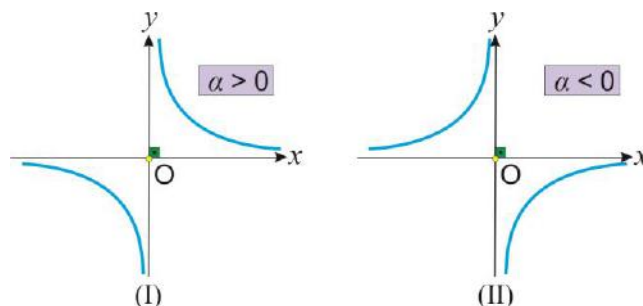
Έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της και έχει εξίσωση $x = -\beta/2a$.

Η συνάρτηση $y = a/x$ $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$ με $a \neq 0$ λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** (σχήμα 16).

I. Αν $a > 0$, η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 16 I.

II. Αν $a < 0$, η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 16 II.



Σχ. 16

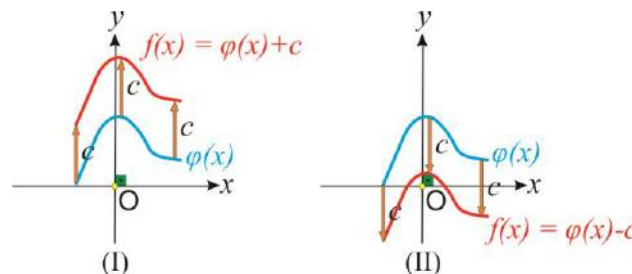
Κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

α. $f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **πάνω** (Σχήμα 17 I).

β. $f(x) = \varphi(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **κάτω** (Σχήμα 17 II).



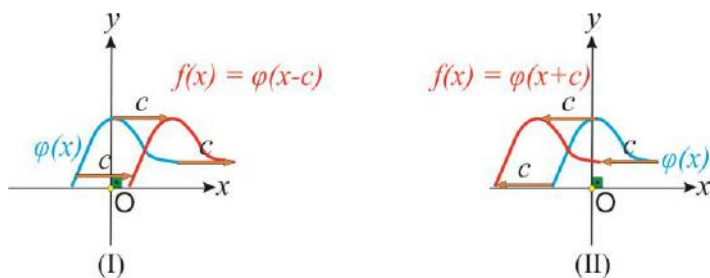
Σχ. 17

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

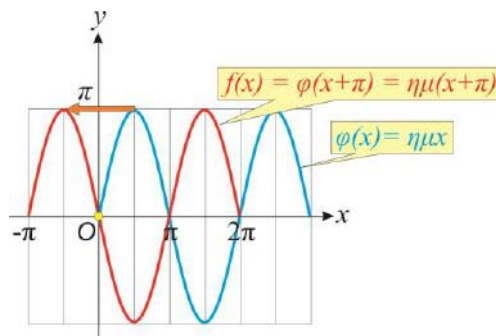
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

α. $f(x) = \varphi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **δεξιά**. (Σχήμα 18 I).

β. $f(x) = \varphi(x + c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα **αριστερά**. (Σχήμα 18 II και Σχήμα 19).



Σχ. 18



Σχ. 19

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(x + \pi)$

3. Τριγωνομετρία

Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών

Σε ορθογώνιο τρίγωνο

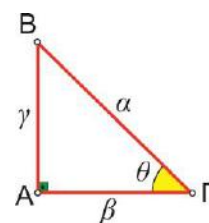
Για μία οξεία γωνία θ ορθογωνίου τριγώνου (Σχήμα 20)

$$\text{συν}\theta = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

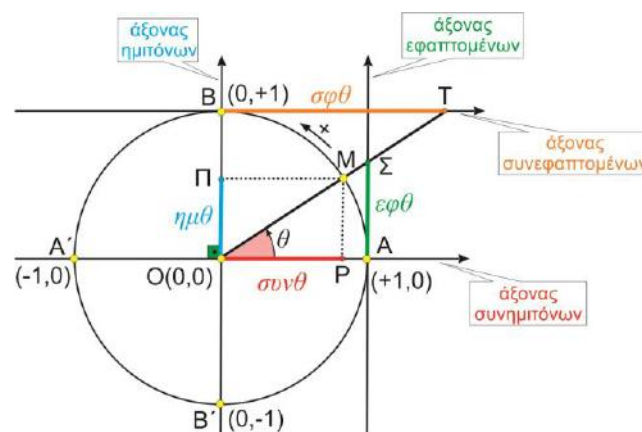
$$\text{ημ}\theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\text{σφ}\theta = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{\beta}{\gamma}$$



Σχ. 20



Σχ. 21

Σε τριγωνομετρικό κύκλο

Τριγωνομετρικός κύκλος: ο κύκλος με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων και ακτίνα $\rho = 1$.

Αν θ μία τυχαία γωνία (Σχήμα 21) και η τελική πλευρά της τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ, τότε:

συν θ = τετμημένη του σημείου Μ = $\overline{OP}$.

ημ θ = τεταγμένη του σημείου Μ = $\overline{OP}$.

εφ θ = τεταγμένη του σημείου Σ = $\overline{AS}$.

σφ θ = τετμημένη του σημείου Τ = $\overline{BT}$.

Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\epsilon\phi\theta = \eta\mu\theta/\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sigma\phi\theta = \sigma\upsilon\nu\theta/\eta\mu\theta$$

$$\alpha/\eta\mu A = \beta/\eta\mu B = \gamma/\eta\mu\Gamma$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

(Νόμος των ημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο)

(Νόμος των συνημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο)

$$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \pm \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha \pm \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu\alpha \pm \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha \pm \beta}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \pm \sigma\upsilon\nu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2} \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

Σχέση μοιρών και ακτινίων: $\mu/180 = \alpha/\pi$

Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Μνημονικός κανόνας: Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα ή διαφορά

I. ακέραιο πολλαπλάσιο του π , [δηλ. της μορφής $k\pi \pm \theta$], τότε έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

II. περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$ [δηλ. της μορφής $(2k+1)\pi/2 \pm \theta$], τότε εναλλάσσουν τριγωνομετρικούς αριθμούς(ημ→συν, εφ→σφ).

Το πρόσημο είναι το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού της γωνίας, που έχει τιμή $k\pi \pm \theta$ ή $(2k+1)\pi/2 \pm \theta$, όπου θεωρείται ότι η γωνία θ είναι οξεία. (Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού μιας γωνίας καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει η γωνία).

Π.χ.

$\eta\mu(\pi-\theta) = \eta\mu\theta$, με πρόσημο θετικό, γιατί η γωνία $(\pi-\theta)$ λήγει στο 2^ο τεταρτημόριο και επομένως έχει θετικό ημ.

$\eta\mu(\pi+\theta) = -\eta\mu\theta$, με πρόσημο αρνητικό, γιατί η γωνία $(\pi+\theta)$ λήγει στο 3^ο τεταρτημόριο και επομένως έχει αρνητικό ημ.

$\epsilon\phi(\pi/2-\theta) = \sigma\phi\theta$, με πρόσημο θετικό, γιατί η γωνία $(\pi/2-\theta)$ λήγει στο 1^ο τεταρτημόριο και επομένως έχει θετική εφ.

$\sigma\upsilon\nu(3\pi/2+\theta) = \eta\mu\theta$, με πρόσημο θετικό, γιατί η γωνία $(3\pi/2+\theta)$ λήγει στο 4^ο τεταρτημόριο και επομένως έχει θετικό συν.

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Rightarrow x = 2k\pi + \theta, \quad \text{ή } x = 2k\pi + \pi - \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

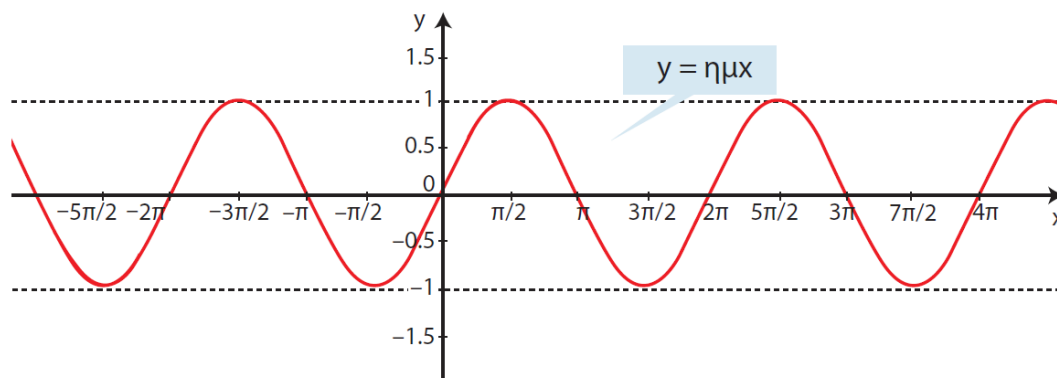
$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = 2k\pi \pm \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

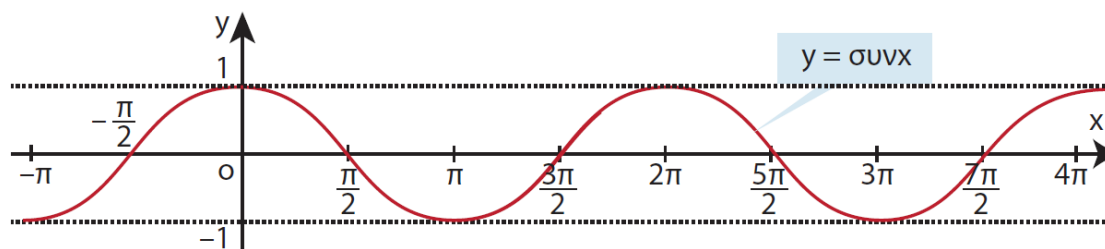
Διαγράμματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π (Σχήμα 22).



Σχ. 22

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π (Σχήμα 23).



Σχ. 23

Σε μία συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$:

α. Το ρ καθορίζει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης, που είναι ρ και $-\rho$ αντίστοιχα.

β. Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $2\pi/\omega$.

π.χ. η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$ έχει περίοδο $2\pi/2 = \pi$.

Τα προηγούμενα ισχύουν και για μία συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.